פתרון מטלה 07 — משוואות דיפרנציאליות, 80320

30 במאי 2026

שאלה 1

נתבונן במערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -y - \sin(x) \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא את נקודות שיווי המשקל של המערכת.

פתרון: כדי למצוא נקודות שיוויון משקל אנחנו צריכים שיתקיים

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

אז $y = 0$ ברור ולכן נשאר ש־$\sin(x) = 0$ וזה קורה עבור $k\pi$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.
כלומר נקודות שיווי המשקל הן כל הנקודות מהצורה $(k\pi, 0)$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

□

סעיף ב'

נקבע את היציבות (לא אסימפטוטית) של נקודות שיווי המשקל.

פתרון: ראשית

$$DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -1 \end{pmatrix}$$

מהמחזוריות של פונקציית קוסינוס עלינו לחלק לשני מקרים

1. אם k זוגי כלומר $x = 2\pi m$ עבור $m \in \mathbb{N}$: במקרה זה $\cos(x) = 1$ ולכן המטריצה שלנו היא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

והפולינום האופייני אם כך הוא

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

והשורשים שלו הם $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ולשני הערכים העצמיים יש חלק ממשי שלילי ממש ולכן לפי הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית נובע שנקודות אלו יציבות.

2. אם k אי־זוגי כלומר $x = \pi(2m+1)$ עבור $m \in \mathbb{N}$: במקרה זה $\cos(x) = -1$ ולכן המטריצה שלנו היא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני אם כך הוא

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

והשורשים שלו הם $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ אבל יש לנו ערך עצמי חיובי ממש ולכן לפי הקריטריון הלינארי לאי־יציבות נובע שנקודות אלו לא יציבות.

□

שאלה 2

נתבונן במערכת המשוואות הדיפרנציאליות

$$\begin{cases} x' = (1-y-2x)x \\ y' = (x-1-y)y \end{cases}$$

סעיף א'

נניח כי (x_0, y_0) תנאי התחלה שנמצא על אחד הצירים (כלומר אחת הקואורדינטות היא אפס).
נבחן מהו הפתרון למערכת המשוואות הנתונה שזה תנאי ההתחלה שלו ונשווה את הפתרון לפתרון המקביל במודל לוקה־וולטרה.

הוכחה: אם תנאי ההתחלה נמצא על ציר ה־x (כלומר $y_0 = 0$, כלומר אין טורפים) אז $y' = 0$ ולכן האוכלוסייה $y(t) = 0$ תמיד ועבור x המשוואה הופכת להיות $x' = x - 2x^2$ ולכן $-2x^2$ מאט את קצב הגידול של x' והוא הופך להיות משמעותי יותר, כלומר האוכלוסייה לא יכולה לחצות את הרף של $x = \frac{1}{2}$ כי אז הנגזרת תהיה שלילית ותתייצב על ערך זה וזו משוואה לוגיסטית.
במודל לוקה־וולטרה מהתרגול אם אין טורפים אוכלוסיית הנטרפים גדלה אקספוננציאלית ומתפוצצת לאינסוף אבל המודל החדש מציאותי יותר כי הוא מונע את הפיצוץ בעזרת הגבת משאבים.
אם תנאי ההתחלה נמצא על ציר ה־y (כלומר $x_0 = 0$, כלומר אין נטרפים) אז $y' = -y - y^2$ אבל זו בעצם אוכלוסיית טורפים שאין לה מה לאכול ולכן גם האיבר $-y^2$ גורם לכך שככל שיש יותר טורפים קצב התמותה שלהם מואץ (הם מתחרים זה בזה או פוגעים אחד בשני כי אין מזון) והאוכלוסייה פשוט תדעך ותיכחד (תשאף ל־0).
במודל לוקה־וולטרה הטורפים גוועים ברעב ודועכים לאפס בצורה מעריכה אבל במודל החדש אם יש כמות גדולה של טורפים בהתחלה הם ימותו הרבה יותר מאשר במודל הרגיל (from obvious reasons) ובפרט אולי מהר יותר מהדעיכה המעריכית. □

סעיף ב'

נמצא את 4 נקודות שיווי המשקל של המערכת.

פתרון: נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y(x-1-y) = 0 \\ x(1-y-2x) = 0 \end{cases}$$

כמובן הפיתרון הטריוויאלי $y = x = 0$ מתאים כאן.
אם $x = 0$ ו־$y \neq 0$ אז

$$y(-1-y) = 0 \underset{y\neq 0}{\iff} -1-y = 0 \iff y = -1$$

כלומר $(0, -1)$ היא נקודת שיווי משקל.
אם $x \neq 0$ ו־$y = 0$ אז באופן דומה

$$x(1-y-2x) = 0 \underset{x\neq 0}{\iff} 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

כלומר $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ היא נקודת שיווי משקל.
נשארה האופציה ש־$x, y \neq 0$ ונפתור את מערכת המשוואות הלינארית

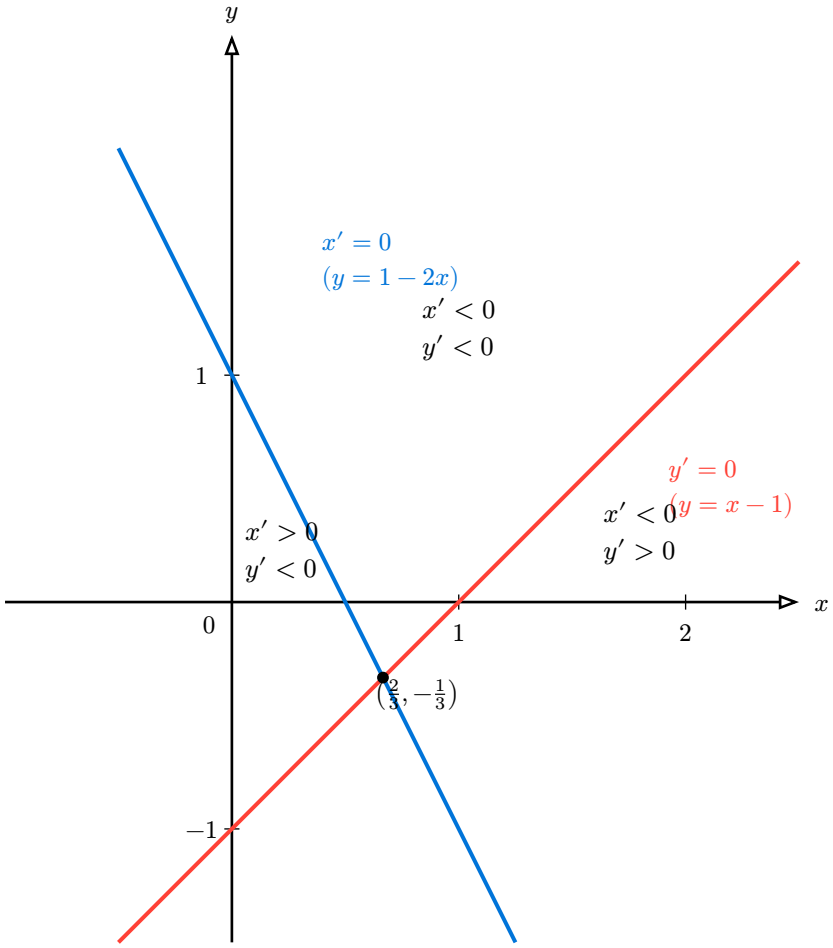
$$\begin{cases} x-1-y = 0 \\ 1-y-2x = 0 \end{cases} \implies x-1-y-(1-y-2x) = 0 \iff x-2+2x = 0 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3} \implies y = -\frac{1}{3}$$

כלומר הנקודה $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ היא גם נקודת אי־יציבות. □

סעיף ג'

נצייר על־גבי מערכת צירים xy את הקווים $\{x'=0\},\{y'=0\}$ ונסמן על־גבי הרביע הראשון את התחומים בהם $x'>0, x'<0, y'>0, y'<0$.

הוכחה: ברביע הראשון $(x,y>0)$ הישר $y=x-1$ מתקיים רק כאשר $x\geq 1$ והישר $y=1-2x$ מתקיים רק עבור $x\leq \frac{1}{2}$.
מתחת לישר $y=x-1$ נקבל $y'>0$ ומעליו $y'<0$. מתחת לישר $y=1-2x$ נקבל $x'>0$ ומעליו $x'<0$.
קישורי הציור שלי ב־typst מוטלים בספק.



(

□

סעיף ד'

נוכיח כי כל הפתרונות שמתחילים ברביע הראשון מתכנסים לנקודת שיווי משקל כלשהי של המערכת.

הוכחה: נבחין שברביע הראשון אין נקודות שיווי משקל עם ערכי y חיובים.
לכל (x,y) ברביעי הראשון, אם $x>\frac{1}{2}$ בוודאי שמתקיים $1-2x<0$ ולכן הביטוי $x(1-y-2x)<0$ קרי $x(t)$ יורדת חזק וככל שהפתרון מתקדם $x(t)$ ייקטן וייתכנס לתחום שבו $x\leq\frac{1}{2}$.
ברגע ש־$x<\frac{1}{2}$ הביטוי $x-1-y$ הוא בהכרח שלילי ממש וחסום מלעיל על־ידי $-\frac{1}{2}-y$ ולכן y' תמיד שלילי ברביע הזה כלומר $y(t)$ יילך וידעך לאפס.
כאשר $y(t)\to 0$ המערכת מתכנסת לנקודות שיווי המשקל היחידה שנמצאת על גבול התחום והיא $(\frac{1}{2},0)$, כנדרש. □

שאלה 3

נניח כי $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ שדה גזיר ברציפות כך ש־0 נקודת שיווי משקל של המערכת $x'=F(x)$.
נסמן ב־$A=D_0F$ את הדיפרנציאל של F ב־0 ונניח כי כל הערכים העצמיים של A בעלי חלק ממשי שלילי.

סעיף א'

נראה כי הגבול

$$S=\int_0^\infty \exp(tA)^T\exp(tA)\,\mathrm{d}t$$

קיים ונראה כי S מטריצה חיובית בהחלט ושלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\langle Sx\mid Ax\rangle=-\frac{1}{2}\|x\|_2^2$$

הוכחה: מלמה שראינו בהוכחה של הקריטריון הלינארי נובע שקיים C ו־$a>0$ כך ש־$\|\exp(tA)\|\le Ce^{-ta}$ לכל $t\ge 0$ ולכן הביטוי המקביל לאינטגרנד

$$\left\|\exp(tA)^T\exp(tA)\right\|\le C^2e^{-2ta}$$

הוא כמובן דועך אקספוננציאלית והאינטגרל של S בהכרח מתכנס.
לכל $x\neq 0$ התבנית הריבועית מקיימת

$$\langle Sx,x\rangle=\int_0^\infty\langle\exp(tA)^T\exp(tA)x,x\langle\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\|\exp((tA)x)\|^2\,\mathrm{d}t$$

אבל מטריצת האקספוננט תמיד הפיכה ו־$\|\exp(tA)x\|>0$ ולכן האינטגרל חיובי ממש.
נסמן $x(t)=\exp(tA)x$ ולכן

$$x'(t)=A\exp(tA)x=\exp(tA)Ax$$
$$\langle Sx,Ax\rangle=\int_0^\infty\langle x(t),x'\rangle\,\mathrm{d}t$$

זה בידיוק אינטגרל על החצי של הנגזרת ומהמשפט היסודי

$$\int_0^\infty\frac{1}{2}\|x(t)\|^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(\|x(\infty)\|^2-\|x(0)\|^2)$$

אבל $\lim_{t\to\infty}\exp(tA)x=0$ מהערכים העצמיים ולכן נקבל

$$-\frac{1}{2}\|x(0)\|^2=-\frac{1}{2}\|x\|_2^2$$

□

סעיף ב'

נראה כי הפונקציה $L(x)=\langle Sx\mid x\rangle$ כאשר S היא המטריצה מהסעיף הקודם היא פונקציית ליאפונוב חזקה עבור F בסביבה של 0 ונסיק כי 0 היא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית של המערכת $x'=F(x)$.

הוכחה: מהסעיף הקודם $L(x)>0$ לכל $x\neq 0$ ו־$L(0)=0$ כלומר ל־L יש מינימום ממש בראשית וזה בידיוק התנאי הראשון של פונקציית ליאפונוב.
מהגדרה

$$F(x)=F(0)+Ax+o(\|x\|)=Ax+o(\|x\|)$$

נחשב

$$\langle\nabla L(x),F(x)\rangle=2\langle Sx,F(x)\rangle=2\langle Sx,Ax+o(\|x\|)\langle=2\langle Sx,Ax\rangle+2\langle Sx,o(\|x\|)\rangle$$

אבל מהסעיף הקודם $2\langle Sx,Ax\rangle=-\|x\|^2$ ו־$o(\|x\|)$ דועך מהר יותר לאפס מ־$\|x\|$ ולכן בסביבה מספיק קטנה של 0 המכפלה השנייה זניחה ביחס ל־$-\|x\|^2$ כלומר היא קטנה מ־$\frac{1}{2}\|x\|^2$ בערך מוחלט.
אז בסביבה של 0 מתקיים

$$\langle\nabla L(x),F(x)\rangle\le-\|x\|^2+\frac{1}{2}\|x\|^2=-\frac{1}{2}\|x\|^2<0$$

כלומר הנגזרת שלילית ממש מחוץ לראשית ולכן $L(x)$ היא פונקציית ליאפונוב חזקה וממשפט ליאפונוב זה אומר ש־$(0,0)$ היא יציבה אסימפטוטית.

□